



Prof. Dr. H.-D. Donner
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
13. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, und sei ω die 1-Form auf U definiert durch:

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist aber keine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 2: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ω eine stetige 1-Form auf U und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Setze

$$K = \sup\{\|\omega(\gamma(t))\| \mid a \leq t \leq b\}$$

und sei L die Länge von γ .

Zeigen Sie, dass $|\int_{\gamma} \omega| \leq K \cdot L$.

Aufgabe 3: Seien X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Für alle $c, d \in A$ existiere eine stetige Funktion $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ mit $\gamma(0) = c$ und $\gamma(1) = d$. Zeigen Sie, dass A zusammenhängend ist.

Aufgabe 4: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und setze $I = [a, b]$. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, dass $\gamma[I]$ eine Nullmenge ist.

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 24. Januar 2011 im Übungskasten.



Andreas Fackler

25. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1: In Aufgabe 1 von Tutorium 10 wurde gezeigt, dass es eine geschlossene Kurve γ gibt mit $\int_{\gamma} \omega = 2\pi$, also besitzt ω keine Stammfunktion. ω ist aber geschlossen, denn:

$$\begin{aligned} D_y \frac{-y}{x^2 + y^2} &= \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) - (-y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ D_x \frac{x}{x^2 + y^2} &= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Da die Abbildungsnorm von $\omega(\gamma(t))$ für alle t durch K beschränkt ist, gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \omega \right| &= \left| \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) \, dt \right| \leq \int_a^b |\omega(\gamma(t))(\gamma'(t))| \, dt \\ &\leq \int_a^b \|\omega(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt \leq \int_a^b K \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = K \cdot L \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Angenommen, A wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es disjunkte offene Mengen U und V mit $A \subseteq U \cup V$ und $A \cap U \neq \emptyset$ und $A \cap V \neq \emptyset$. Sei also $c \in A \cap U$ und $d \in A \cap V$. Nach Voraussetzung gibt es eine stetige Funktion $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ mit $\gamma(0) = c$ und $\gamma(1) = d$. Als Urbilder offener Mengen sind dann $X = \gamma^{-1}(U)$ und $Y = \gamma^{-1}(V)$ offen in $[0, 1]$. Da aber $A \subseteq U \cup V$ ist, ist $[0, 1] = X \cup Y$. Da U und V disjunkt sind, sind auch ihre Urbilder X und Y disjunkt. Außerdem ist $0 \in X$ und $1 \in Y$. Also sind X und Y nichtleere disjunkte offene Mengen, deren Vereinigung $[0, 1]$ ist. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass Intervalle zusammenhängend sind.

Aufgabe 4: Da γ stetig differenzierbar ist, ist $\gamma' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und damit beschränkt. Sei also $c \in \mathbb{R}$, so dass $\|\gamma'(t)\| \leq c$ für alle $t \in I$.

Sei $K \geq 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $k \in \{0, \dots, K\}$ setze $s_k = a + \frac{k}{K}(b - a)$. Dann bilden die $[s_{k-1}, s_k]$ mit $1 \leq k \leq K$ eine Unterteilung von I in Intervalle der Länge $\frac{b-a}{K}$. Für jedes $t \in [s_{k-1}, s_k]$ ist $t - s_k \leq \frac{b-a}{K}$, also:

$$\|\gamma(t) - \gamma(s_k)\| = \left\| \int_t^{s_k} \gamma'(r) \, dr \right\| \leq \int_{s_k}^t \|\gamma'(r)\| \, dr \leq |t - s_k| \cdot c \leq \frac{c(b-a)}{K}$$

Insbesondere ist also $\gamma[[s_{k-1}, s_k]]$ in einem Würfel W_k mit Seitenlänge $\frac{c(b-a)}{K}$ enthalten. $\gamma[I]$ ist folglich Teilmenge der Vereinigung $\bigcup_{k=1}^K W_k$. Es ist aber

$$v\left(\bigcup_{k=1}^K W_k\right) \leq \sum_{k=1}^K v(W_k) = \sum_{k=1}^K \left(\frac{c(b-a)}{K}\right)^n = \frac{c^n(b-a)^n}{K^{n-1}}$$

Für $K \rightarrow \infty$ konvergiert dies wegen $n \geq 2$ gegen 0. Daraus folgt, dass $\gamma[I]$ eine Nullmenge ist.